实二次型

遗留问题 — 相合等价关系的标准形

A与B相合，则 A对称 ⇔ B对称.

仅考虑实对称矩阵的相合标准形.

§ 实对称阵的相合标准形

由于任意实对称矩阵正交相似于对角阵，（有理相合标准形）

命题：任意实对称阵 A 都相合对角矩阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 为 A 的全体特征值. 正交相合标准形

证：∃ 正交阵 Q s.t. $A = Q^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} Q$

Q 正交 $\Rightarrow Q^{-1} = Q^T \Rightarrow A$ 与 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相合. □

特征值分三类：正，负，零.

定理：设 A 为实对称矩阵，则存在可逆阵 P 使得

$$P^TAP = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$ 相合规范型 normal form

其中 $\operatorname{rank} A = r+s \leq n$. 其中 r, s 由 A 唯一确定，不依赖于 P 的选取. 称 r, s 为 A 的正、负惯性指数. $r-s$ 为 A 的符号差.

证：存在性：$P_1^TAP_1 = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_r, -\mu_{r+1}, \cdots, -\mu_{r+s}, 0, \cdots 0)$

其中 $\mu_1, \cdots, \mu_{r+s} > 0$.

$P_2 = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}, \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\mu_{r+s}}}, 1, \cdots, 1\right)$ & $P = P_1P_2$

$\Rightarrow P^TAP = \mathrm{diag}(\overbrace{1,\cdots,1}^{r}, \overbrace{-1,\cdots,-1}^{s}, 0\cdots 0)$.

唯一性：仅需证：若 $B=\begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0\end{pmatrix}$ 与 $C=\begin{pmatrix} I_{r'} & & \\ & -I_{s'} & \\ & & 0\end{pmatrix}$ 相合，则

$$r=r',\quad s=s'.$$

B 与 C 相合 $\Rightarrow$ $\exists$ 可逆 P s.t. $P^TCP=B$　　B.C的阶数

$\Rightarrow \mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(C) \Rightarrow r+s=r'+s' \le n$

反证. 不妨设 $r<r'$ (则 $s>s'$)

记 $\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，则 $y_i=0$ 为以 $x_1\cdots x_n$ 为变量的一次齐次方程

考虑方程组：$\begin{cases} x_1=x_2=\cdots=x_r=0 \\ y_{r'+1}=y_{r'+2}=\cdots=y_n=0\end{cases}$

方程个数小于 $n \Rightarrow \exists$ 非零解. i.e. $\exists\, a_{r+1},\cdots,a_n$ 不全为零

使得 $b:=P\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ a_{r+1}\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_{r'}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\neq 0$

（其中 $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ a_{r+1}\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = a$）

$$\Rightarrow \underset{\displaystyle (Pa)^TC(Pa)}{\underset{\shortparallel}{a^TBa}} = -a_{r+1}^2-\cdots-a_{r+s}^2 \le 0$$

$$(Pa)^TC(Pa) = b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{r'}^2 > 0$$

矛盾

② 推论：n 阶实对称矩阵 A 正定当且仅当其正惯性指数为 n.

§8.1 二次型的矩阵表示

欧氏空间

空间距离公式 $d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x, y, z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

时空中的距离公式 $d^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = (x, y, z, t)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

Lorentz 空间

保持 Lorentz 内积的变换 $\Rightarrow$ Lorentz 变换

定义：1) 称实数域上的一个(含 n 个变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的)齐次二次多项式为二次型.

2) $\forall$ 二次型 $Q(x_1, \cdots, x_n)$，$\exists!$ 实对称阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ s.t.

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = x^T A x,$$

称 A 为二次型的矩阵，A 的秩称为二次型的秩，A 的特征值称为二次型的特征值

$$\text{二次型} \xleftrightarrow[1:1]{Q = x^T A x} \text{实对称矩阵}$$

例如：1) $Q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

2) $Q = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 \Leftrightarrow A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

3) 欧氏度量 $A = I_3$，时空 $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -c^2 \end{pmatrix}$

二次型变元的可逆线性替换：

设 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 其中 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则

$\quad\;\; \overset{\shortparallel}{x} \qquad\qquad\; \overset{\shortparallel}{y}$

$$Q = x^TAx = (y^TP^T)\cdot A\cdot(Py) = y^T(P^TAP)y$$

$\Rightarrow$ 二次型 Q 关于新的变元 $y_1 \cdots y_n$ 的矩阵为 $B = P^TAP$.

§ 二次型的标准型

定义：若二次型经可逆变换 $x = Py$ 化为

$$\tilde{Q}(y_1 \cdots y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

称 $\tilde{Q}$ 为 Q 的一个(有理)标准形.

A 对称 $\Rightarrow \exists$ 正交矩阵 P s.t. $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$.

定理：任给实二次型 $Q = x^TAx$，存在正交变换 $x = Py$ 将 Q 化为

$$\tilde{Q}(y_1 \cdots y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

这里的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值. 称 $\tilde{Q}$ 为 Q 的正交标准形

证明：设 $Q = x^TAx$. $(A^T = A)$

④ $\Rightarrow \exists$ 正交矩阵 P s.t. $A = P^T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P$.

$$\Rightarrow\ Q = x^T\left(P^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P\right)x$$

记 $y = Px$，则

$$Q = y^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad \square$$

定理：给定任意二次型 Q 存在线性变换 $x = Py$ 使得

$$Q = y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_s^2$$

其中 r，和 S 不依赖于 P 的选取。称

$$y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_s^2$$

为 Q 的规范形（或实标准型）

称 r 与 s 为 Q 的正负惯性指数。

证明：设 $Q = x^TAx$.　$(A^T = A)$

$\Rightarrow$ $\exists$ 可逆矩阵 P s.t. $A = P^T\begin{pmatrix}I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0\end{pmatrix}P$.

$$\Rightarrow\ Q = x^T\left(P^T\begin{pmatrix}I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0\end{pmatrix}P\right)x$$

记 $y = Px$，则 $Q = y^T\begin{pmatrix}I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0\end{pmatrix}y$

$$= y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_{r+s}^2 \quad \square$$